

MODELAGEM MATEMÁTICA DE FENÔMENOS NATURAIS

MATHEMATICAL MODELING OF NATURAL PHENOMENA

Felipe Corrêa Veloso dos Santos¹

Edivaldo Fernandes da Silva²

Tatiane Mesquita Vaz³

Resumo: A compreensão dos fenômenos que permeiam nosso mundo é uma empreitada que transcende os limites das disciplinas isoladas. Nas últimas décadas, a Modelagem Matemática emergiu como uma ferramenta poderosa para desvendar os segredos desses fenômenos complexos, independentemente de suas origens nas ciências exatas, biológicas, geografia ou outras áreas do conhecimento humano. Neste sentido, este trabalho teve por objetivo revisar e resgatar conceitos inerentes a modelagem com o foco na interdisciplinaridade. A partir desta revisão sistêmica infere-se que ao explorar exemplos em diversas áreas, fica evidente o papel crucial que a modelagem matemática desempenha na compreensão e previsão de fenômenos complexos. Através da análise das várias técnicas e abordagens apresentadas. Sendo notável como a modelagem matemática transcende as barreiras disciplinares, proporcionando percepções singulares e ferramentas poderosas para a exploração do mundo natural e das interações que nele ocorrem.

Palavras-chave: Sistemas complexos, Sistemas dinâmicos e Interação de sistemas

1 Escola Politécnica e de Artes, Pontifícia Universidade Católica de Goiás, Goiânia, Goiás, Brasil

2 Departamento de Matemática UNU – Posse, Universidade Estadual de Goiás, Brasil.

3 Departamento de Agronomia- Centro Universitário de Goiás – UNIGOIÁS, Goiânia, Goiás, Brasil



Abstract: The comprehension of the phenomena that pervade our world is a pursuit that extends beyond the confines of conventional disciplinary boundaries. In recent decades, mathematical modeling has emerged as a powerful tool for elucidating the enigmas of these intricate phenomena, irrespective of their provenance in the exact sciences, biology, geography, or other domains of human knowledge. In this sense, the objective of this study was to review and recover concepts inherent in modeling with a focus on interdisciplinarity. From this comprehensive review, it can be inferred that by exploring examples in various disciplines, the crucial role that mathematical modeling plays in understanding and predicting complex phenomena becomes evident. Through the analysis of the various techniques and approaches presented, it is notable how mathematical modeling transcends disciplinary boundaries, providing unique insights and powerful tools for exploring the natural world and the interactions that occur within it.

Keywords: Complex systems, Dynamic systems and Systems Interaction

Introdução

A busca pelo entendimento profundo dos fenômenos que permeiam nosso mundo é uma empreitada que transcende os limites das disciplinas isoladas. Nas últimas décadas, a Modelagem Matemática emergiu como uma ferramenta poderosa para desvendar os segredos desses fenômenos complexos, independentemente de suas origens nas ciências exatas, biológicas, geografia ou outras áreas do conhecimento humano. A capacidade de representar, compreender e prever padrões comportamentais em um contexto multidisciplinar tornou-se uma das abordagens mais valiosas e interconectadas no universo da pesquisa científica.

A Modelagem Matemática, como o próprio nome sugere, envolve a criação e manipulação de estruturas Matemáticas que descrevem as características essenciais de um sistema ou fenômeno. Ela oferece uma maneira sistemática de traduzir a complexidade da realidade para equações, gráficos e



representações numéricas que podem ser analisados quantitativamente. Independentemente do campo de estudo, a Modelagem Matemática permite aos pesquisadores explorarem diferentes cenários, testar hipóteses e refinar suas teorias de uma maneira objetiva e controlada.

Na física, a Modelagem Matemática tem desempenhado um papel central na compreensão dos princípios fundamentais que regem o universo. Da mecânica clássica à relatividade geral, das equações de Maxwell à física quântica, os avanços teóricos têm sido intrinsecamente ligados à criação e manipulação de modelos matemáticos. Além disso, a Modelagem Matemática tem desbravado novos territórios no estudo de fenômenos complexos e interdisciplinares, como a dinâmica de sistemas climáticos e a propagação de doenças infecciosas.

Nas ciências biológicas, a Modelagem Matemática proporciona insights valiosos sobre a evolução, o comportamento populacional, a genética e a interação entre espécies. Através da formulação de equações diferenciais, por exemplo, os pesquisadores podem simular como uma doença se espalha por uma população, permitindo assim a elaboração de estratégias eficazes de controle. Da mesma forma, a Modelagem Matemática também se revela indispensável na pesquisa farmacológica, onde ajuda a prever a eficácia e a toxicidade de novos medicamentos.

Na geografia e nas ciências ambientais, a Modelagem Matemática auxilia na análise de padrões de movimento de correntes oceânicas, na previsão de mudanças climáticas e na compreensão das dinâmicas de ecossistemas complexos. Os modelos matemáticos permitem simular cenários futuros com base em diferentes variáveis, contribuindo assim para tomadas de decisão informadas em questões relacionadas à conservação ambiental e ao uso sustentável dos recursos naturais.

Além dessas áreas, a Modelagem Matemática se estende para a economia, a sociologia, a psicologia e muitas outras disciplinas, evidenciando sua versatilidade e poder explicativo. Este artigo visa explorar a riqueza dessa abordagem multidisciplinar, destacando exemplos emblemáticos de como a Modelagem Matemática tem sido aplicada com sucesso para desvendar os mais complexos fenômenos que cercam nossa realidade. Ao fazê-lo, espera-se enfatizar a importância crescente da colaboração entre diferentes campos do conhecimento e a capacidade da Matemática de unificar essas

áreas em uma busca comum pelo conhecimento mais profundo.

As próximas seções detalham as aplicações mais relevantes da Modelagem Matemática, em termos de seu potencial na descrição acurada de fenômenos.

Aplicações de Modelos Matemáticos

Em termos de campos de aplicação da Modelagem Matemática, um exemplo latente é o de modelos de caracterização da qualidade da água em sistemas hídricos. De fato, a crescente interferência humana tem impactado de maneira significativa a qualidade das águas dos rios nos últimos anos e, diante dessa problemática, surge a necessidade de desenvolver abordagens eficazes para monitorar e controlar a poluição hídrica. Nesse contexto, os modelos matemáticos de qualidade da água se destacam como ferramentas cruciais, permitindo não apenas a projeção de cenários futuros, mas também a identificação das fontes poluidoras.

O pioneiro entre esses modelos é o modelo de Streeter-Phelps, criado nos Estados Unidos em 1925. Esse modelo foi desenvolvido com o propósito de avaliar o comportamento do oxigênio dissolvido no Rio Ohio após a introdução de uma carga poluente. A partir desse ponto de partida, surgiram diversas variações aprimoradas, comprovando que a literatura científica é rica em estudos que utilizam a Modelagem Matemática como base para a avaliação da qualidade da água em rios, lagos e reservatórios (FLECK, L., TAVARES, M. H. F., EYNG, E, 2013).

No entanto, dada a pluralidade de modelos matemáticos disponíveis, a seleção adequada se faz crucial. A escolha do modelo que melhor representa as condições específicas da área em estudo é um passo essencial para garantir resultados precisos. Consequentemente, a Modelagem Matemática emerge como uma ferramenta indispensável para apoiar os gestores públicos no gerenciamento eficaz dos recursos hídricos. Com a capacidade de projetar e simular cenários diversos, esses modelos oferecem uma visão clara das implicações das ações humanas sobre a qualidade da água, direcionando políticas de proteção ambiental e sustentabilidade. Em última análise, a aplicação desses modelos

matemáticos não apenas permite avaliar a situação presente, mas também contribui para a construção de um futuro mais saudável e equilibrado para nossos recursos hídricos.

De fato, desde os anos 60 a poluição dos cursos hídricos se tornou uma séria ameaça global à saúde humana, impulsionada pelo rápido crescimento populacional e desenvolvimento econômico não sustentável. Isso resulta em despejo de águas residuais nos rios sem tratamento prévio, muitas vezes superando a capacidade natural de autodepuração do ambiente aquático. Além dos riscos à saúde, essa poluição causa perda de biodiversidade local e afeta a qualidade da água usada para abastecimento após tratamento. Para compreender e prevenir esses impactos, foram concebidos modelos matemáticos de qualidade da água como ferramentas de controle. No caso particular do modelo de Streeter-Phelps, este avalia o comportamento do oxigênio dissolvido em rios poluídos. O modelo deu origem a variações mais avançadas, amplamente utilizadas para avaliar a qualidade da água em rios, lagos e reservatórios. No entanto, a escolha correta do modelo é vital, pois sua adequação depende das condições específicas da área estudada.

No Brasil, a implementação da Política Nacional dos Recursos Hídricos (PNRH) requer ferramentas de verificação de objetivos e custos, e nesse quesito se encaixa a Modelagem Matemática. Diante da ampla gama de modelos disponíveis, a escolha adequada deve atender às necessidades do pesquisador. Em suma, a poluição hídrica representa uma preocupação global, e os modelos matemáticos surgem como aliados indispensáveis na compreensão, previsão e gestão da qualidade da água, impulsionando a sustentabilidade dos recursos hídricos.

Ainda no contexto de sistemas hídricos, mas com o foco de garantir o abastecimento de populações, modelos matemáticos também têm sido empregados com tal propósito. Marques et al. (2020) abordam, com propriedade, a Modelagem Matemática e a simulação computacional de um sistema hidráulico de abastecimento de água em Belo Horizonte - MG. Dada a importância da água potável para a sustentabilidade humana, é essencial analisar metodologias que promovam um uso racional e equitativo desse recurso. O desperdício, a escassez e os custos resultantes do mau uso da água são desafios globais, exigindo que os órgãos responsáveis pela distribuição e manutenção da água



forneçam-na com qualidade e quantidade adequadas. Os autores defendem a Modelagem Matemática como a técnica que traduz problemas da realidade em problemas matemáticos, propondo soluções aplicáveis ao mundo real. O estudo visa aplicar a Modelagem Matemática para analisar a perda de carga em sistemas hidráulicos de abastecimento. Os dados foram coletados na unidade de abastecimento da COPASA no bairro Vale do Jatobá. Embora o estudo foque na perda de carga, a criação de parâmetros regulatórios coerentes é fundamental. No caso, a hidráulica, com suas origens remotas, desempenha papel crucial no gerenciamento de recursos hídricos. A Modelagem Matemática possibilita assim, nesse caso, uma gestão mais eficiente ao abordar a mecânica dos fluidos, termodinâmica e outros aspectos científicos. Com efeito, a análise da perda de carga em sistemas de abastecimento é central, pois altos índices podem afetar negativamente a prestação de serviços, a indústria e a saúde pública. Isso se justifica pelo fato de que modelos matemáticos, associados a recursos computacionais, permitem tomadas de decisão informadas e a correção eficiente de falhas nos sistemas de abastecimento. Em resumo, a Modelagem Matemática oferece uma abordagem eficaz para analisar e melhorar a gestão de sistemas hidráulicos de abastecimento de água. Ela não apenas auxilia na redução de perdas de carga, mas também proporciona uma base sólida para decisões sustentáveis e igualitárias em relação ao fornecimento de água potável. O estudo dos autores destaca dessa forma a relevância da engenharia hidráulica e da Modelagem Matemática como ferramentas vitais para enfrentar os desafios atuais e futuros relacionados à gestão dos recursos hídricos.

No contexto da Educação Matemática, a Modelagem ganha também considerável peso ao contribuir para o êxito da proposta pedagógica a ser adotada. Kluber e Burak (2008) exploram quatro concepções de Modelagem Matemática propostas por outros autores, como Burak, Biembengut, Caldeira e Barbosa. O objetivo é analisar como cada pesquisador percebe a Modelagem, considerando suas implicações no ensino e na compreensão da Matemática subjacente a cada abordagem. Essa seleção foi baseada na relevância dos autores na área, bem como em suas contribuições para a Conferência Nacional sobre Modelagem e Educação Matemática (CNMEM) e para a educação Matemática em suas dissertações e teses. A análise concentra-se na relação entre professor e aluno na construção

do conhecimento matemático por meio da Modelagem. Busca-se evidenciar como a abordagem dialógica pode promover essa construção, reconhecendo que tanto o professor quanto o aluno trazem suas experiências para a interação pedagógica. A pesquisa também investiga como cada concepção de Modelagem compreende a ciência e se alinha aos modelos epistemológicos das ciências humanas, destacando se consideram o sujeito como ativo e não apenas passivo no processo de aprendizado. O estudo recorre a diálogos com outros autores que discutem educação e epistemologia para embasar as interpretações relacionadas às concepções de Modelagem Matemática analisadas. Ao explorar as diferentes abordagens, o trabalho visa aprofundar nossa compreensão das implicações pedagógicas e epistemológicas da Modelagem Matemática na educação, enfatizando a importância de considerar tanto os aspectos cognitivos quanto os interacionais na promoção do aprendizado matemático.

Em uma abordagem no campo da saúde, a Modelagem Matemática e numérica se faz presente no trabalho de Quarteroni (2017) sobre a Modelagem do sistema cardiovascular, tópico de pesquisa que tem atraído interesse notável da comunidade Matemática devido à sua intrínseca dificuldade Matemática e ao crescente impacto das doenças cardiovasculares em todo o mundo. Neste artigo de revisão, abordam-se os dois principais componentes do sistema cardiovascular: a circulação arterial e a função cardíaca. Descrevem-se sistematicamente todos os aspectos do problema, desde a aquisição de imagens de dados, estabelecendo os princípios físicos básicos, analisando os modelos matemáticos associados que compreendem sistemas de EDP e EDO, propondo métodos numéricos sólidos e eficientes para sua aproximação, e simulando tanto problemas de referência quanto problemas clinicamente inspirados. A própria Modelagem Matemática impõe desafios tremendos devido à complexidade incrível do sistema cardiocirculatório, à natureza multiescala dos processos fisiológicos envolvidos e à necessidade de elaborar métodos computacionais que sejam estáveis, confiáveis e eficientes. Questões críticas envolvem a filtragem dos dados, a identificação dos parâmetros dos modelos matemáticos, o desenvolvimento de tratamentos ótimos e a consideração das incertezas. Por essa razão, o artigo dedica sua última parte a problemas de controle e inversos, incluindo a estimativa de parâmetros, a quantificação de incertezas e o desenvolvimento de modelos de ordem reduzida

que são de suma importância ao resolver problemas de alta complexidade, que de outra forma seriam inatingíveis.

Uma aplicação importante da Modelagem Matemática se dá também no estudo de solos e geográficos, em trabalho relevante de Arhonditsis et al. (2002). Nesse trabalho, três modelos matemáticos, a equação do número de curva de escoamento, a equação universal de perda de solo e as funções de resposta de massa, são avaliados para prever a carga de nutrientes de fontes difusas provenientes de bacias hidrográficas agrícolas na região do Mediterrâneo. Essas metodologias foram aplicadas a uma bacia, a Bacia do Golfo de Gera, que é um ecossistema terrestre típico das ilhas do arquipélago do Egeu. A calibração dos parâmetros do modelo baseou-se em dados de parcelas experimentais das quais foram medidas perdas de sedimentos, escoamento de água e nutrientes na borda do campo. Foi dada ênfase especial ao transporte de nutrientes em fase dissolvida e sólida desde suas fontes nos campos dos agricultores até a saída da bacia hidrográfica, a fim de estimar as respectivas taxas de atenuação. Constatou-se que a carga de nutrientes de fontes difusas devido a perdas na superfície foi elevada durante o inverno, com a contribuição variando entre 50% e 80% das perdas anuais totais de nutrientes do ecossistema terrestre. A boa correspondência entre os dados simulados e experimentais apoia a visão de que esses procedimentos de Modelagem devem ser considerados como ferramentas metodológicas confiáveis e eficazes em áreas do Mediterrâneo para avaliar medidas de controle potenciais, como práticas de manejo para conservação de solo e água e mudanças no uso da terra, visando a redução de perda de solo e entrega de nutrientes às águas superficiais. Além disso, as modificações das formulações Matemáticas gerais e os valores experimentais dos parâmetros do modelo fornecidos pelo estudo podem ser utilizados em aplicações posteriores dessas metodologias em bacias hidrográficas com características semelhantes.

Exemplo importante do emprego da Modelagem Matemática na Medicina é o do trabalho de Bertsimas et al. (2018). Decisões importantes relacionadas à saúde humana, como estratégias de triagem para o câncer, muitas vezes precisam ser tomadas sem um entendimento satisfatório dos processos biológicos subjacentes e de outros processos. Em vez disso, muitas vezes são baseadas em mo-



delos matemáticos que aproximam a realidade. Frequentemente, múltiplos modelos são criados para estudar o mesmo fenômeno, o que pode levar a decisões conflitantes. É natural buscar um processo de tomada de decisão que identifique decisões que todos os modelos considerem eficazes, e se propõe tal quadro neste trabalho. Nesse sentido, o artigo aplica o quadro à triagem de câncer de próstata para identificar estratégias baseadas no antígeno específico da próstata (PSA) que funcionem bem sob todos os modelos considerados. Utiliza-se busca heurística para identificar estratégias que equilibrem a otimização da média das avaliações de todos os modelos e sejam “conservadoras” ao otimizar a avaliação do modelo mais pessimista. Foram identificados três modelos matemáticos recentemente publicados que podem estimar a expectativa de vida ajustada à qualidade (QALE) das estratégias de triagem baseadas em PSA, tendo sido identificadas 64 estratégias que equilibram a maximização da média e a avaliação mais pessimista dos modelos. Em termos de resultados, todas prescrevem limites de PSA que aumentam com a idade, e 57 envolvem triagem bienal. Estratégias com avaliações mais altas no modelo pessimista começam a triagem mais tarde, interrompem a triagem mais cedo e usam limites de PSA mais altos em idades mais jovens. As 64 estratégias superam 22 estratégias geradas por especialistas anteriormente publicadas. As 41 mais “conservadoras” permaneceram melhores do que a ausência de triagem com todos os modelos em análises de sensibilidade extensivas. Com isso, aprimorou-se a abordagem de Modelagem Matemática comparativa ao se identificar estratégias que funcionam bem sob todos os modelos, para vários graus de conservadorismo dos tomadores de decisão.

A área de Gestão da Manutenção também faz uso da Modelagem Matemática. O artigo de Scarf (1997) traz um verdadeiro apelo aos modeladores de manutenção para trabalharem com engenheiros e gestores de manutenção em problemas reais. Tal colaboração é essencial para que a Modelagem de manutenção seja aceita dentro da comunidade de engenharia. Isso é particularmente importante no projeto e construção de sistemas de informações de gestão de manutenção, caso tais sistemas sejam utilizados para gerenciar e operar políticas de manutenção no novo milênio. Nesse contexto, são discutidas áreas em desenvolvimento da Modelagem de manutenção, a saber: manuten-



ção baseada em inspeção; manutenção baseada em condição; manutenção para sistemas com vários componentes; e sistemas de informações de gestão de manutenção. Alguns novos modelos relacionados à substituição de capital também são considerados. Assim, o autor manifesta preocupação com a Modelagem Matemática da manutenção, em vez dos processos de gestão relacionados à manutenção. A discussão sobre sistemas de informações de gestão de manutenção está incluída devido à sua importância em fornecer dados para a Modelagem Matemática e na implementação de políticas de manutenção baseadas em modelos.

Outro exemplo relevante da Modelagem Matemática na área da Saúde reside no artigo de Khan e Atangana (2022). Os autores construíram um novo modelo matemático para compreender melhor o novo coronavírus (variante ômicron). Apresenta-se brevemente a Modelagem da COVID-19 com a variante ômicron e seus resultados matemáticos. Avaliou-se que o modelo Ômicron é localmente assintoticamente estável se o número básico de reprodução for baixo, enquanto para valores mais elevados o modelo no equilíbrio livre de doenças é globalmente assintoticamente estável. Estende-se o modelo para equações diferenciais de segunda ordem para estudar a possível ocorrência de camadas (ondas). Em seguida, estende-se o modelo para uma versão estocástica fracionária e são avaliados seus resultados numéricos. Os dados reais do período de 01/11/2021 a 23/01/2022, na África do Sul, são considerados para obter os valores realistas dos parâmetros do modelo. O número básico de reprodução para os dados sugeridos é aproximadamente constante, o que é muito próximo do número básico de reprodução real na África do Sul. Realizou-se a análise de sensibilidade global usando o método PRCC para investigar os parâmetros mais influentes que aumentam ou diminuem o número de reprodução. Utilizou-se o novo esquema numérico recentemente relatado para a solução de equações diferenciais fracionárias por partes para apresentar a simulação numérica do modelo. Alguns resultados gráficos para o modelo com parâmetros sensíveis são apresentados, indicando que a infecção na população pode ser minimizada seguindo as recomendações da Organização Mundial da Saúde (OMS), como o distanciamento social, o uso de máscaras, a lavagem das mãos, evitar aglomerações etc.

Na área de combustíveis, destaca-se o trabalho de Guo et al. (2022). O trabalho mostra que células de combustível são consideradas novos tipos de fontes de energia limpa, apresentando um método para a identificação ótima de parâmetros desconhecidos de uma Célula de Combustível de Óxido Sólido (SOFC). O principal objetivo é fornecer um método adequado para a minimização da soma dos quadrados dos erros (SSE) entre a voltagem produzida dos dados empíricos e os dados obtidos. Para oferecer uma metodologia eficiente, é utilizada uma versão modificada do algoritmo metaheurístico, chamada de algoritmo Dragonfly de Ordem Fracionária. Para validar o modelo utilizado, ele é avaliado sob várias condições de pressão e temperatura. As realizações finais são comparadas com várias abordagens recentes diferentes, e os resultados mostram a superioridade da metodologia sugerida em relação aos métodos comparativos na identificação de parâmetros do modelo da SOFC.

O campo da Inteligência Artificial também é campo para a Modelagem Matemática. O artigo de Feng et al. (2023) propõe um modelo de avaliação de TA baseado no algoritmo aprimorado de Redes Neurais Convolucionais (CNN). O modelo utiliza a habilidade de extração de características poderosas da rede neural convolucional, adota o conceito de neurônio de canal duplo, melhora a estrutura da rede neural convolucional, reduz o número de parâmetros da rede e obtém as características de classificação do alvo com múltiplos marcadores com base na manutenção da camada de conexão completa. Com base nisso, a Matemática difusa é usada para descrever quantitativamente as características de classificação de alvos com múltiplos marcadores, para definir o valor do peso de cada característica dos alvos e para avaliar o grau de ameaça de múltiplos alvos através do Método de Solução Ideal de Preferência por Similaridade (TOPSIS). Os resultados de simulação mostram que o modelo possui velocidade de convergência rápida e capacidade de previsão de ameaças precisa, e pode obter com precisão a classificação de ameaças de múltiplos alvos.

Considerações Finais

Ao explorar exemplos nas ciências exatas, biológicas, geografia e outras disciplinas, fica

evidente o papel crucial que a Modelagem Matemática desempenha na compreensão e previsão de fenômenos complexos. Através da análise das várias técnicas e abordagens apresentadas, é notável como a Modelagem Matemática transcende as barreiras disciplinares, proporcionando insights valiosos e ferramentas poderosas para a exploração do mundo natural e das interações que nele ocorrem.

Diante da crescente interdisciplinaridade e da necessidade de abordagens holísticas para a resolução de problemas complexos, a Modelagem Matemática se destaca como uma ponte que conecta diversas áreas do conhecimento, permitindo a formulação de teorias e a criação de soluções práticas. O panorama apresentado neste artigo reforça a importância contínua da colaboração entre pesquisadores das ciências exatas e das áreas aplicadas, impulsionando o desenvolvimento de novas técnicas e abordagens que promovam avanços significativos nas respectivas disciplinas e na compreensão global dos fenômenos que regem nosso planeta.

Referências

FLECK, L., TAVARES, M. H. F., EYNG, E. Principais Modelos Matemáticos de Qualidade da Água e Suas Aplicações: uma revisão. Revista Eletrônica Científica Inovação e Tecnologia – UTFPR - Campus Medianeira. Vol. 01, N. 007, ISSN 2175-1846, 2013.

MARQUES, M. C. U., SILVA JR., A. P., MARISA, M., CORREA, R. I. L., ZANETTE, F. C. Modelagem Matemática Aplicada em Sistemas Hidráulicos de Abastecimento de Água no Município de Belo Horizonte – MG. Revista Paramétrica, Revista Paramétrica, Vol. 12, N. 13, 2020.

KLUBER, T.E., BURAK. D. Concepções da Modelagem Matemática: Contribuições Teóricas. Revista Educação Matemática – Pesquisa. São Paulo, v. 10, n. 1, pp. 17-34, 2008.

QUARTERONI, A., MANZONI, A., & VERGARA, C. The cardiovascular system: Mathematical modelling, numerical algorithms and clinical applications. Acta Numerica, 26, pp. 365-590. <https://doi.org/10.1017/S0962492917000046>, 2017.

ARHONDITSIS, G., GIOURGA, C., LOUMOU, A., KOULOURI, M. Quantitative Assessment of



Agricultural Runoff and Soil Erosion Using Mathematical Modeling: Applications in the Mediterranean Region. *Environmental Management* 30, pp. 434-453. <https://doi.org/10.1007/s00267-001-2692-1>, 2002.

BERTSIMAS, D., SILBERHOLZ, J., TRIKALINOS, T. Optimal healthcare decision making under multiple mathematical models: application in prostate cancer screening. *Health Care Manag Sci* 21, pp. 105–118. <https://doi.org/10.1007/s10729-016-9381-3>, 2018.

SCARF, P. A. On the application of mathematical models in maintenance. *European Journal of Operational Research*. Vol. 99, Issue 3, pp. 493-506, ISSN 0377-2217, [https://doi.org/10.1016/S0377-2217\(96\)00316-5](https://doi.org/10.1016/S0377-2217(96)00316-5), 1997.

KHAN, M. A., ATANGANA. A. Mathematical modeling and analysis of COVID-19: A study of new variant Omicron. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Vol. 599, ISSN 0378-4371, <https://doi.org/10.1016/j.physa.2022.127452>, 2022.

GUO, H., GU, W., KHAYATNEZHAD, M., GHADIMI, N. Parameter extraction of the SOFC mathematical model based on fractional order version of dragonfly algorithm. *International Journal of Hydrogen Energy*, Vol. 47, Issue 57, pp. 24059-24068, ISSN 03603199, <https://doi.org/10.1016/j.ijhydne.2022.05.190>, 2022.

FENG, Y., LI, M., PEI, Y. et al. Research on Threat Assessment evaluation model based on improved CNN algorithm. *Multimed Tools Appl*. <https://doi.org/10.1007/s11042-023-16492-6>, 2023.